EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

44e JAARGANG 1968/1969

IV — 15 DECEMBER 1968

INHOUD

WOLTERS-NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang ƒ 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs ƒ 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Heemstede; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 261036 te Voorburg.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Opgaven voor deelname aan de Leesportefeuille met buitenlandse tijdschriften aan G. A. J. Boost, Parklaan 107 A, Roosendaal (NB).

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan G. Krooshof te Groningen.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

DR. JOH. H. WANSINK

In juni 1956 werd door Wimecos en Liwenagel een overeenkomst met de N.V. Erven P. Noordhoff gesloten, die inhield, dat Euclides officieel orgaan van Wimecos en Liwenagel zou worden. Deze overeenkomst maakte een herstructurering van de redactie noodzakelijk. Dr. Wansink nam, als een van de vertegenwoordigers van Wimecos in de redactie, het voorzitterschap op zich.

Twaalf en een half jaar heeft hij het tijdschrift geleid. Bij zijn koperen jubileum heeft hij het nodig geoordeeld afscheid te nemen. Veel heeft hij voor het tijdschrift gedaan. Alle ingekomen artikelen werden door hem gekeurd en, in geval van twijfel, aan medeleden ter beoordeling voorgelegd. Verscheidene bijdragen verschenen van zijn hand. Stapels didactische literatuur zijn door hem doorgenomen om hiervan een overzicht in Euclides te kunnen publiceren. Steeds was hij bereid boekbesprekingen ter hand te nemen. En, wat in de eerste plaats van belang is, hij was geestelijk met het tijdschrift bezig en kwam herhaaldelijk met nieuwe ideeën om de inhoud ervan te verbeteren of aan de gewijzigde omstandigheden aan te passen. We verliezen in hem een bekwaam leider, die we node zien heengaan. We stellen er prijs op ook vanaf deze plaats hem onze hartelijke dank over te brengen voor alles, wat hij voor Euclides gedaan heeft.

Zijn mede-redactieleden

MEDEDELING

Het voorzitterschap van de redactie zal worden overgenomen door de heer G. Krooshof, bij wie voortaan alle bijdragen voor Euclides ingewacht worden. Adres op blz. 2 van de omslag.

Dr. J. H. Wansink zal nog als lid van de redactie aanblijven tot dat een opvolger is aangewezen.

DE SOM VAN t_1

door

Drs. L. van den Brom

Amsterdam

De redactie van Euclides heeft gemeend in de 2e aflevering van de 43e jaargang een opstel te moeten opnemen getiteld: „Over de formules $t_k = s_k - s_{k-1}$ $(k \geqq 2)$ en lim $s_k = s$." Dat opstel geeft mij aanleiding enige opmerkingen te maken over en suggesties te doen voor de behandeling van het onderwerp rijen bij het voortgezet onderwijs.

Genoemd opstel vangt aan met:

„We onderzochten zeven leerboeken op de belangrijke formule, geldig voor *elke* rij: $t_k = s_k - s_{k-1}$ $(k \geqq 2)$
$$t_1 = s_1 \qquad ."$$

Allereerst zij opgemerkt dat het de duidelijkheid niet geschaad had, indien bij die formule gesteld was, wat t_k en s_k voorstellen. En ook welke getallen we voor de indices moeten nemen. Rationale getallen? Vooral dat „*elke*" rij doet mij vragen: „Ook voor rijen in een matrix of voor rijen van congruente driehoeken?" Maar allicht werpt men mij hier tegen, dat toch algemeen bekend is, in de schoolwiskunde, wat met betrekking tot rijen bedoeld wordt met t_k en s_k.

Unformulierte Voraussetzungen sind aber bekanntlich sehr gefährlich, sie können leicht falsch sein und entziehen sich doch, da sie nicht ausdrücklich formuliert sind, einer rationalen Überprüfung.

I. M. Bocheński, Die zeitgenössischen Denkmethoden.

Hoe vaak worden in de wiskunde niet „unformulierte Voraussetzungen" gemaakt. Voor de leraar is alles zo vanzelfsprekend, de leerling moet het vak echter nog leren. Het zijn vooral formeel ingestelde leerlingen, die met die „unformulierte Voraussetzungen" geen raad weten. Vooral omdat „unformulierte Voraussetzungen" in een vak als wiskunde juist niet verwacht worden.
Overdaad aan duidelijkheid en herhaling van definities kan nooit kwaad.

Maar laat ik niet vervelend zijn en mij proberen te gedragen als een ingewijde in het wiskundig jargon. Dan zie ik in de aanhef

van genoemd opstel twee rijen van reële getallen optreden, de rij $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ en de rij $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$, waarbij dan de index de natuurlijke getallen doorloopt.

Terzijde: We kunnen een rij van reële getallen opvatten als een afbeelding van de natuurlijke getallen in de reële getallen.
Een ander standpunt is echter, dat we uitgaande van de natuurlijke getallen volgens een zeker voorschrift een rij kunnen opbouwen. Zo'n voorschrift moet ons de mogelijkheid geven de termen van de rij stap voor stap uit te kunnen rekenen. Dit standpunt sluit nauw aan bij hetgeen we doen als we actueel met de termen van een rij bezig zijn.
Het eerst genoemde standpunt geeft echter gelegenheid tot een fraai verbalisme.

„. . ., geldig voor elke rij: $t_k = s_k - s_{k-1}$ $(k \geqq 2)$
$t_1 = s_1$. "

Dat doet mij vragen: „Voor welke rij? De t-rij of de s-rij?" De letter s komt voor de letter t in ons alfabet en in het begin wordt in het genoemde opstel de aandacht vooral gevestigd op s_k. Dat zou dan aanleiding kunnen zijn te denken, dat bedoeld werd:

„. . . de belangrijke formule, geldig voor elke rij $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$:
$t_k = s_k - s_{k-1}$ $(k \geqq 2)$
$t_1 = s_1$. "

Bij de s-rij wordt zo een voorschrift gegeven om, uit die s-rij, een andere rij, de t-rij, te construeren. De rij $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ is dan een verschilrij afgeleid uit een gegeven rij $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$, en daarbij is middels $t_1 = s_1$ ook een term met index 1 in de t-rij gedefinieerd.

Als we echter lezen:

„. . . de belangrijke formule, geldig voor elke rij $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$:
$t_k = s_k - s_{k-1}$ $(k \geqq 2)$
$t_1 = s_1$. ",

dan wordt een voorschrift gegeven om bij de t-rij, de s-rij te construeren. De s-rij wordt zo de somrij bij een gegeven t-rij.

Wat echter bedoeld werd, gezien hetgeen volgt in het geciteerde opstel, is het volgende:
Bij een rij $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ vormt men, volgens een zeker voorschrift, een rij $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$. Als nu de rij $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ gegeven wordt, hoe vindt men dan de rij $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ terug? Het voorschrift is in het besproken geval het gebruikelijke voorschrift om bij een gegeven rij de somrij te construeren.

In het genoemde opstel wordt nogal bezwaar gemaakt tegen het niet afzonderlijk behandelen van t_1 bij de teruggang van de s-rij naar de t-rij. „Eén leerboek vermeldt zonder meer: $t_k = s_k - s_{k-1}$, alsof

er geen vuiltje aan de lucht is". Het hangt echter geheel af van de wijze waarop de rij $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ gedefinieerd is of we zonder meer de formule $t_k = s_k - s_{k-1}$, voor alle natuurlijke getallen k, mogen stellen.

Een welwillende lezer kan uit het genoemde opstel impliciet opmaken dat gebruik gemaakt is van de volgende definitie voor de somrij:

Bij een gegeven rij van reële getallen $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, waarbij de index k de natuurlijke getallen doorloopt, wordt de rij $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ bepaald door: 1e) $s_1 = t_1$; 2e) $s_k = s_{k-1} + t_k$, voor $k \geqq 2$. Laten we deze definitie in het vervolg met (A) aangeven.

We kunnen echter dezelfde s-rij krijgen, uitgaande van een gegeven t-rij, met het voorschrift (B):

1e) $s_0 = 0$; 2e) $s_k = s_{k-1} + t_k$, voor alle natuurlijke getallen k.

Het zal onnodig zijn op te merken dat (A) en (B) definities zijn met behulp van volledige inductie. Nadrukkelijk wordt echter gesteld dat s_0 met het voorschrift (B) niet tot de s-rij gerekend wordt. De rij $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ bevat geen element met index 0. Zo kunnen we ook bij een gegeven rij $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ een produktrij $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ definiëren: 1e) $p_0 = 1$; 2e) $p_k = p_{k-1} \cdot t_k$, zonder dat we p_0 tot de p-rij rekenen. We gebruiken $s_0 = 0$ en $p_0 = 1$ waar ons het goed dunkt. En als we met alle geweld s_0 als een som en p_0 als een produkt willen zien, wel dan is s_0 een lege som, en als zodanig 0; p_0 een leeg produkt, en als zodanig, zinvol, 1.

De definities (A) en (B) brengen dezelfde s-rij voort. Echter bij de teruggang van de s-rij naar de t-rij kunnen we met (B) volstaan met de formule $t_k = s_k - s_{k-1}$, voor ieder natuurlijk getal k. Met (A) moeten we t_1 altijd afzonderlijk behandelen.

Men zou nog de fout kunnen maken, te menen dat (B) mislukt in het geval dat s_k gegeven is als een functie van k, $s(k)$, waarbij $s(0) \neq 0$, zoals bijvoorbeeld $s_k = 2^k + 1$. Als 0 niet tot de natuurlijke getallen gerekend wordt, dan is als k een natuurlijk getal voorstelt, s_0 niet gedefinieerd door $s_k = 2^k + 1$. Als men (B) gebruikt dan is altijd $s_0 = 0$, wat men ook krijgt voor s_k.

Laten we nog eens denken aan de voorbeelden $s_k = 2^k - 1$ en $s_k = 2^k + 1$. Maken we gebruik van (A) dan moeten we in beide gevallen t_1 apart bekijken, want uit (A) volgt:

$t_k = s_k - s_{k-1}$ $(k \geqq 2)$ en $t_1 = s_1$.

Met (B) krijgen we:

$t_k = s_k - s_{k-1}$ (voor ieder natuurlijk getal k) en $s_0 = 0$. Nogmaals, s_{k-1} mogen we voor $k = 1$ niet uit $s_k = s(k)$ afleiden. Als $k = 1$, dan volgens (B) $s_{k-1} = 0$.

Dat bij het toepassen (B) voordelen heeft in die gevallen waarin

de uitdrukking $s(k)$, die s_k geeft, 0 wordt bij substitutie van 0, is duidelijk. (0 kunnen we ook aangeven door bijvoorbeeld $2^0 - 1$). Indien $s(0) \neq 0$, dan moeten we met (B) hetzelfde werk doen als met (A). Uit (B) volgt $t_1 = s_1 - s_0 = s_1$.

Het niet 0 zijn van $s(0)$ is vaak veel opvallender, dan het afwijken van t_1 van het algemene gedrag van de rij zoals dat door $s(k)$ gegeven wordt. Met (A) moet men uitgaande van $s(k)$ eerst t_k uitrekenen en daarna controleren of t_1 afwijkt.

Als men mij mocht tegenwerpen dat (B) ongebruikelijk is, dan ben ik daar wel gevoelig voor. Vooral in een land met sterk gecentraliseerde eindexamens, zonder enige verantwoording van de leraar voor de vraagstukken bij het schriftelijk deel van het examen, zal ik zeker geen propaganda gaan voeren voor een van het gebruikelijke afwijkende behandelingswijze van een bepaald onderwerp.

Terzijde: Ik heb eens in een gymnasiumklas de algemene gedaante van de vierkantsvergelijking geïntroduceerd als: $ax^2 + 2bx + c = 0$. O.a. heeft die gedaante het voordeel dat bij de afleiding van de wortelformule, $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$, de 2 voor het dubbele produkt bij het kwadraatafsplitsen al aanwezig is. Toen het volgende cursusjaar de klas overging naar een andere leraar, was enige verwarring wel het gevolg. Mijn conclusie was toen om maar weer de gangbare gedaante $ax^2 + bx + c = 0$ te gebruiken. Op de zittenblijvers, die ik in een ander verband weer wel ontmoette, moet mijn behandelingswijze van de vierkantsvergelijkingen wel een vreemde indruk gemaakt hebben, toen ik ze de „2" weer ging afleren.
De lering die men hieruit kan trekken: bij het invoeren van een afwijkende of nieuwe methode is het zeer gewenst dat alle wiskundeleraren van de school meedoen.

Laten we eens een getallen-voorbeeld gaan bekijken.
Gegeven is de rij: 1, 0, 0, 0, . . .
Beter genoteerd de rij $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ met $t_k = 1$, als $k = 1$ en $t_k = 0$, als $k \neq 1$. (Eventueel met het Kronecker-symbool, de rij $\{\delta_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$.) Laten we nu eens de somrij, de rij der partiële sommen, vormen. Daarbij gaan we eerst naïef te werk en vatten sommatie als een binaire operatie op. We krijgen dan de rij 1, 1, 1, 1, . . ., de rij $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ met $s_k = 1$ voor ieder natuurlijk getal k. (Of de rij $\{\delta_{kk}\}_{k=1}^{\infty}$.) Vanwege de naïefheid is $s_1 = t_1 + t_2$, $s_2 = (t_1 + t_2) + t_3$, etc. $s_k = s_{k-1} + t_{k+1}$.

Als we onbekend zijn met de oorspronkelijke rij, en we vragen die oorspronkelijke rij uit de s-rij af te leiden, dan volgt in ons geval uit het constant zijn van de s-rij, dat $t_k = 0$ voor $k \geqq 3$. Voor t_1 en t_2 krijgen we slechts één vergelijking n.l. $t_1 + t_2 = s_1 = 1$. Om ondubbelzinnig terug te kunnen komen is nog een betrekking nodig. Men kan bijvoorbeeld opgeven wat t_1 in de oorspronkelijke rij is.

Een andere mogelijkheid, om niet in die impasse te geraken, is om minder naïef te werk te gaan. Formeel wordt de somrij voorzien van een eerste term $s_1 = t_1$, daarna op de gebruikelijke wijze volgens het voorschrift (A) $s_k = s_{k-1} + t_k$. Dat dit een formele kwestie is zal de leerling niet zonder meer duidelijk zijn, de leerling moet op zo iets gewezen worden. Vooral formeel ingestelde leerlingen zullen „de som van t_1" vreemd vinden, als zij tot dan sommatie als een binaire operatie ontmoet hebben.

Maar als het formeren van de somrij dan toch een formele kwestie is, dan kunnen we met even veel recht het formele voorschrift (B) hanteren.

Er zij hier nog opgemerkt dat ik het spraakgebruik „*de*" somrij, voor de rij der partiële sommen heb overgenomen. Met behulp van sommatie kan men op vele andere manieren uit een gegeven rij een nieuwe rij afleiden.

De *volledige inductie* is een onderwerp, dat in een opstel over rijen zeker niet misplaatst is.

Het eerste algebravraagstuk van het schriftelijk eindexamen 1965, Gymnasium en H.B.S., was een vraagstuk dat slechts goed en volledig was op te lossen met behulp van volledige inductie. (Voor een goede oplossing waarin geen gebruik gemaakt wordt van het principe der volledige inductie, ook niet op verkapte wijze met stippeltjes, houd ik mij ten zeerste aanbevolen.) Ondanks dat ik van mening ben dat de volledige inductie thuishoort in het programma van het voortgezet onderwijs, was ik allerminst enthousiast over het introduceren van de volledige inductie door middel van genoemd eindexamen-vraagstuk. In 1965 bevatte het officiële leerplan, waar men zich bij landelijke examens toch op dient te richten, het onderwerp volledige inductie niet.

Rijen, zowel eindige als oneindige, volledige inductie en recurrente betrekkingen horen één samenhangend onderwerp te vormen in het wiskunde-leerplan van het voortgezet onderwijs. De voorbereiding en de behandeling van dat onderwerp zullen over verschillende klassen verdeeld moeten worden. En zij zullen de nodige tijd opeisen. Het zal wel zijn vruchten afwerpen. We hoeven in dit verband alleen maar te denken aan het programmeren van computers, waarbij het recurrent denken uiterst belangrijk is.

O.a. ter voorbereiding van de volledige inductie kan men de leerlingen ijverig laten manipuleren met rijen. Een groot gebied aan mogelijkheden ligt hier nog braak. Om maar wat te noemen:

Uitgaande van een gegeven rij kan men de leerlingen, met behulp van een zeker voorschrift, somrijen, verschilrijen, produktrijen en quotiëntrijen laten opstellen. Ook van hogere orde.

Men kan een rij geven en het voorschrift, volgens welke de rij verkregen is uit een oorspronkelijke rij, en dan vragen welke die oorspronkelijke rij was. Ook de opgaven van deze soort zijn voor vele variaties vatbaar.

Men kan volgens één of ander voorschrift een rij construeren en dan de eigenschappen van zo'n rij gaan bekijken. En laat men zich hierbij niet beperken tot rekenkundige en meetkundige rijen.

Men kan twee rijen laten vermenigvuldigen volgens Cauchy-produkten, met als illustratie het z.g. kruisvermenigvuldigen van getallen.

Als men deze zaak serieus aanpakt, dan zal blijken dat de door mij hier aangegeven mogelijkheden slechts een fractie vormen van hetgeen hier te doen is.

De vraagstukken, die men nu aantreft in de algebra-boeken voor de middelbare school onder het hoofdstuk rijen, zijn voor het grootste deel niet anders als vraagstukken *ingeklede vergelijkingen*. Waarbij dan de vergelijkingen moeten worden opgesteld aan de hand van de formules die voorkomen bij de rekenkundige en meetkundige rijen. Veel begrip over de rijen in het algemeen brengen deze vraagstukken niet bij.

Om de mentaliteit die hieruit voortvloeit te illustreren: Bij de eindexamens geef ik, als gecommitteerde, de kandidaten wel eens een vraagstuk van het volgende type op: Van een meetkundige rij is $t_{28} = 8$, $t_{31} = 64$; gevraagd t_{25}. Meestal ziet men dan de kandidaat ijverig formules aandragen, en zo hij de neiging heeft heuristisch werkend op te schrijven: $t_{25}, t_{26}, t_{27}, t_{28}, t_{29}, t_{30}, t_{31}$.
en daar onder: ? 8 64,
onderdrukt hij die neiging wel, omdat hij bij het onderwerp rijen gewend is vergelijkingen op te schrijven.

De discussienota's van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde geven enige verbetering aan. Zo wordt bij de onderbouw VWO, op bladzijde 38 van het interimrapport onder het hoofd: Enige speciale functies, o.a. genoemd: rijen (functies van N naar R), volledige inductie, in het bijzonder: rekenkundige en meetkundige rij.

De rijen worden dus kennelijk niet als zelfstandig onderwerp gezien. Het zijn speciale functies. Vanuit hoger standpunt wellicht heel mooi. Maar als dan blijkt dat de functies in het platonische kader van de verzamelingenleer moeten worden ingepast, dan vraag ik mij af hoe men de volledige inductie moet behandelen op een wijze, die verteerbaar is voor de leerlingen van de onderbouw.

Als men zich op *naïef* standpunt stelt dan is de afbeeldingsopvatting van geheel andere geaardheid als het beginsel van de volledige inductie. Als men een rij opvat als een afbeelding van N naar R, dan is de rij in één keer klaar. Men ziet hierbij de rij als één geheel, als

een afbeelding, als een deelverzameling van het Cartesisch produkt $N \times R$.

Bij het toepassen van de volledige inductie ziet men echter een rij opgebouwd uit de individuele termen. Het kenmerkende van de volledige inductie is het stap voor stap.

Dat ook in de gelederen van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde hier getwijfeld wordt, mag blijken uit een uitspraak van die zijde gedaan d.d. 30 oktober 1967, weergegeven in Euclides 43, bladzijde 101: „Wie „rijen" netjes wil behandelen, komt niet helemaal onder het begrip „volledige inductie" uit; wie echter leerlingen van de derde klas opgaven laat maken waarbij zij zelfstandig deze bewijsvoering moeten geven, stelt hun te zware eisen."

Persoonlijk zal ik het zeer waarderen, indien één of meer leden van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde de opvatting, dat een rij een afbeelding van N naar R is, gecombineerd met de volledige inductie, zo zouden uitwerken, dat de afbeeldings-opvatting wezenlijk gebruikt wordt bij de volledige inductie, en tevens één en ander didactisch verantwoord is voor de middelbare school. Mijn bedoeling van deze uitdaging is, te voorkomen dat een fraai verbalisme wordt ingevoerd, dat niet functioneert. [1])

Mijns inziens ware het wenselijker geweest als de rijen als zelfstandig onderwerp aan de orde gesteld waren, bijvoorbeeld:

Rijen: Spelen met rijen, volledige inductie, recurrente betrekkingen, o.a rekenkundige en meetkundige rijen.

Zo het begin van het opstel op de bladzijden 49 t.e.m. 52 van de 43e jaargang van Euclides mij aanleiding gaf tot enige opmerkingen zo ook het slot:

„De som van een sommeerbare meetkundige rij is $s = \dfrac{a}{1-r}$, voor deze rij geldt tevens $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = 0$."

Als een rij sommeerbaar is, dan is $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = 0$. Er is echter een zeer bekend voorbeeld, n.l. de rij $\left\{\dfrac{1}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$, die niet sommeerbaar is, maar waarvoor toch $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = 0$ is.

Als men bij de sommeerbaarheid van rijen expliciet $\lim\limits_{k\to\infty} t_k$ in het spel gaat brengen, dan zal men de leerlingen zeker moeten leren:

---

[1]) In het Voorstel leerplan Rijksscholen komt de volledige inductie niet voor. (Noot van de redactie.)

$\lim_{k \to \infty} t_k = 0$ *is een nodige, maar geen voldoende voorwaarde, voor de sommeerbaarheid van de rij* $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Men zal ze dat zeker moeten leren, als men de leerlingen bij het oplossen van vraagstukken over sommeerbare rijen, expliciet gebruik laat maken van $\lim_{k \to \infty} t_k = 0$.

In het enge kader, waarin het onderwerp rijen nu behandeld wordt op de middelbare school, komen wel geen rijen voor die niet sommeerbaar zijn, maar waarvoor toch $\lim_{k \to \infty} t_k = 0$. Maar dat is geen reden om niet voorzichtig te zijn met $\lim_{k \to \infty} t_k$ bij sommeerbaarheid van rijen.

Men hoede zich voor *didactiek op korte termijn*. Het enge kader, waarin het onderwerp rijen gebracht wordt is juist oorzaak van veel misverstand bij de leerlingen, niet alleen tijdens hun middelbare-school-carrière.

Om een voorbeeld te noemen:

De eindexamen-kandidaten kunnen vaak geen onderscheid maken tussen de vragen:

„Aan welke voorwaarde moet de reden van een meetkundige rij voldoen, opdat de rij sommeerbaar is?" en

„Aan welke voorwaarde moet de reden van een meetkundige rij voldoen, opdat de rij convergent is?"

Het lijkt mij voor de leerlingen duidelijker de term *sommeerbare rij* niet in te voeren, maar te vervangen door een wat langere, meer omschrijvende uitdrukking: *rij, waarvan de somrij een limiet heeft.* (Limiet hier natuurlijk in eigenlijke zin bedoeld.) [1]

In dezelfde stijl zal men dan spreken van:

De limiet van de somrij van een meetkundige rij, mits deze limiet bestaat, is $s = \dfrac{a}{1 - r}$.

[1]) In het Voorstel leerplan Rijksscholen komt voor onder het leerplan voor het vijfde en zesde leerjaar vwo (wiskunde I): convergentie van rijen en reeksen. Voor een toelichting hierop zie de korrel in Euclides 43, I, p. 22—23. (Noot van de redactie.)

KORREL CXLVI

Zo simpel is het niet, het is veel simpeler!

Veel stereometrieboeken voor het VHMO laden de schijn op zich, een axiomatische opbouw te willen geven van de driedimensionale Euclidische meetkunde.

Men treft er de volgende axioma's in aan:

A. 1. Door elke twee verschillende punten gaat precies één lijn.
A. 2. Door elke drie verschillende punten gaat tenminste één vlak.
A. 3. Als een lijn twee verschillende punten met een vlak gemeen heeft, ligt die lijn in dat vlak.
A. 4. Als twee vlakken een punt gemeen hebben, hebben zij tenminste één lijn gemeen.
A. 5. Als de lijn p en het punt A in het vlak V liggen en A geen punt van p is, dan is er in het vlak V precies één lijn die door A gaat en die geen punt met p gemeen heeft.

Nadat deze vijf axioma's (of enkele daarvan) genoemd zijn, wordt de volgende stelling „bewezen":
Door drie punten die niet op één lijn liggen, gaat precies één vlak.

Ik zal U met het „bewijs" van deze stelling niet vervelen. Deze stelling kan nl. met de vijf genoemde axioma's niet bewezen worden. Hier volgt een tegenvoorbeeld:
De ruimte is de verzameling van de vijf (twee aan twee verschillende) „punten" A, B, C, D en E;
de lijnen van deze ruimte zijn de tien puntenparen;
de vlakken van deze ruimte zijn de vijf puntenviertallen.

Het verwekt dan ook niet mijn verbazing, dat axioma 15 van D. Hilbert (zie diens: *Grundlagen der Geometrie*) luidt:
Zu irgend drei nicht auf ein und derselben Geraden liegenden Punkten A, B, C gibt es nicht mehr als eine Ebene, die mit jedem der drei Punkte A, B, C zusammengehört.

Arnhem A. J. Th. Maassen

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. dr. O. BOTTEMA
Delft

LXXIV. *Een ongelijkheid voor twee gelijkvormige driehoeken.*

1. Aan de zogenaamde stelling van Pompeïu is in de laatste jaren ook in ons land, bijna tot vermoeiens toe aandacht gegeven[1]). Zij luidt als volgt:

I. Is P een punt in het vlak van de gelijkzijdige driehoek ABC, dan voldoen PA, PB en PC aan de driehoeksongelijkheid: elk dezer afstanden is kleiner of gelijk aan de som van de beide overige; het gelijkteken geldt alleen dan als P op de omgeschreven cirkel van ABC ligt.

Het is spoedig gebleken dat I een bijzonder geval is van een algemenere uitspraak, die sinds lang als een generalisatie van de stelling van Ptolemeus bekend was, namelijk:

II. Is P een punt in het vlak van de driehoek ABC, dan voldoen $a.PA$, $b.PB$ en $c.PC$ aan de driehoeksongelijkheid; het gelijkteken geldt alleen dan als P op de omgeschreven cirkel van ABC ligt.

Het bewijs van II kan het eenvoudigst als volgt worden gegeven. De inversie met P tot centrum en $PA.PB.PC$ tot macht transformeert A, B, C in de punten A', B', en C' waarvoor geldt $B'C' = a.PA$ etc.; de punten A', B' en C' zijn collineair als P op de omgeschreven cirkel ligt.

Onlangs ontmoetten wij een stelling die, reeds meer dan een halve

[1]) D. Pompeïu, Une identité entre nombres complexes et un théorème de géométrie élémentaire, Bull. Math. Phys. Ecole Polyt., Bucarest, 6, (1936), 6—7; S. V. Pavlović, Sur une démonstration géometrique d'un théoreme de M. D. Pompeïu, El. der Math. 8(1953), 13—15; J. P. Sydler, Autre démonstration du théorème de Pompeïu, id. 15—16; G. R. Veldkamp, Een stelling uit de elementaire meetkunde van het platte vlak, N. T. v. Wsk. 44(1956—57), 1—4; O. Bottema, De stelling van Pompeïu, id. 183—184; W. Boomstra, Nogmaals de stelling van Pompeïu, id. 285—288; G. R. Veldkamp, Nog een generalisatie van de stelling van Pompeïu, N. T. v. Wsk. 45(1957—58), 197—204; O. Bottema, De stelling van Pompeïu, Euclides 37 (1961—62), 273—285; O. Bottema, On a relation between four line segments, Annali di Math. (IV), 70(1965), 295—304; S. V. Pavlović, Ueber die Erweiterung eines elementargeometrischen Satzes von D. Pompeïu, Abh. Math. Sem. Hamburg, 30(1967), 54—60.

eeuw geleden door Tweedie[1]) gegeven, blijkbaar uit de circulatie is geraakt en als volgt luidt:

III. Zijn $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$ twee in hetzelfde vlak gelegen *gelijkzijdige* driehoeken, dan voldoen A_1A_2, B_1B_2 en C_1C_2 aan de driehoeksongelijkheid. Het is duidelijk dat I een bijzonder geval van III is, het geval namelijk waarbij één der beide driehoeken de zijden nul heeft en dus tot een punt is verschrompeld.

2. Men kan zich de vraag voorleggen of er een theorema bestaat dat een generalisatie is van III op analoge wijze als II dat is van I. Zij wordt beantwoord door de eveneens van Tweedie afkomstige stelling:

IV. Zijn $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$ *twee in eenzelfde vlak gelegen direkt gelijkvormige driehoeken, waarbij* $B_1C_1 : C_1A_1 : A_1B_1 = B_2C_2 : C_2A_2 : A_2B_2 = a : b : c$, *dan voldoen* $a \,.\, A_1A_2$, $b \,.\, B_1B_2$ en $c \,.\, C_1C_2$ *aan de driehoeksongelijkheid.*

I, II en III zijn ten duidelijkste bijzondere gevallen van IV. Uit het hier volgende bewijs zal blijken in welke situatie het gelijkteken geldt. De twee gelijkvormige driehoeken hebben een gelijkvormigheidscentrum, d.w.z. er bestaat een punt O zodanig, dat A_2 aan A_1, B_2 aan B_1 en C_2 aan C_1 wordt toegevoegd door de transformatie die het produkt is van de rotatie om O over de hoek $\varphi(0 \leqq \varphi < 2\pi)$ en de homothetie met centrum O en de faktor k $(k \geqq 0)$. (Het punt O bestaat alleen dan niet als de driehoeken congruent en gelijk gericht zijn; in dat geval is de stelling triviaal). Is

$$OA_i = p_i, \quad OB_i = q_i, \quad OC_i = r_i (i = 1, 2)$$

dan is

$$p_2 = kp_1, \; q_2 = kq_1, \; r_2 = kr_1 \quad \text{en}$$
$$\angle A_1OA_2 = \angle B_1OB_2 = \angle C_1OC_2 = \varphi.$$

Daaruit volgt dat

$$A_1A_2^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2\,p_1p_2 \cos \varphi$$

en dus

$$A_1A_2 = mp_1, \text{ en evenzo } B_1B_2 = mq_1, \; C_1C_2 = mr_1,$$

waarbij

$$m = (k^2 - 2k \cos \varphi + 1)^{\frac{1}{2}}.$$

De lijnstukken A_1A_2, B_1B_2 en C_1C_2 zijn dus evenredig met OA_1, OB_1 en OC_1, zodat de stelling onmiddellijk volgt uit II, toegepast

[1]) C. Tweedie, Inequality theorem regarding the lines joining corresponding vertices of two equilateral, or directly similar, triangles. Edinb. Mathem. Soc. Proc. Proc. 22(1904), 22—26; P. Pinkerton, Note on Mr. Tweedie's theorem in geometry, id. 27.

op de driehoek $A_1B_1C_1$ en het punt O. Tevens blijkt dan:

IV*. *In stelling IV geldt het gelijkteken als het gelijkvormigheidscentrum van $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$ ligt op de omgeschreven cirkel van één der driehoeken* (en dus ook op die van de andere).

3. Tweedie geeft van IV nog het volgende fraaie bewijs, dat zelfs de inversie niet benut, maar anderzijds niet rechtstreeks tot IV* leidt. Laat P het snijpunt zijn van BC en B_1C_1, Q dat van CA en C_1A_1, R van AB en A_1B_1. (Zie fig. 1, waar $A_1B_1C_1$ geheel binnen ABC is gekozen; in andere situaties gaat het bewijs analoog). Is $\angle BRA_1 = \varphi$, dan is ook $\angle CPB_1 = \varphi$ en $\angle AQC_1 = \varphi$. Daar

$$\angle RAQ = \angle B_1A_1C_1 = \alpha \text{ is}$$

ARA_1Q een koordenvierhoek. De driehoeken AA_1Q en QRA hebben dus dezelfde omgeschreven cirkel; men heeft derhalve

$$\frac{QR}{\sin\alpha} = \frac{AA_1}{\sin\varphi} \text{ en evenzo } \frac{RP}{\sin\beta} = \frac{BB_1}{\sin\varphi}, \frac{PQ}{\sin\gamma} = \frac{CC_1}{\sin\varphi}.$$

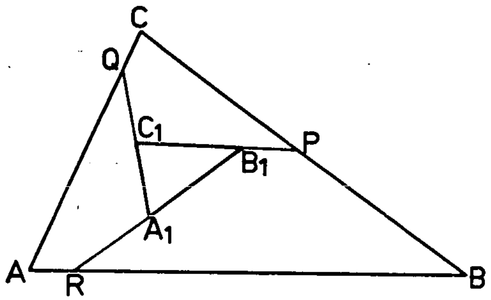


Fig. 1.

Daaruit volgt dat QR, RP en PQ evenredig zijn met $AA_1 \sin\alpha$, $BB_1 \sin\beta$ en $CC_1 \sin\gamma$, dus met $a.AA_1$, $b.BB_1$, en $c.CC_1$, welke drie produkten bij gevolg aan de driehoeksongelijkheid voldoen. Een bezwaar van het bewijs is dat het niet geldt voor $\varphi = 0$ (de punten P, Q en R liggen dan in het oneindige), zodat dit geval afzonderlijk moet worden behandeld.

4. De stelling IV heeft een zekere verwantschap met de merkwaardige configuratie uit de vlakke kinematica, die bekend staat als het theorema van Roberts. Zij (fig. 2) $A_1B_1B_2A_2$ een stangenvierzijde met de vaste draaipunten A_1 en B_1 en $A_2B_2C_2$ een driehoek met A_2B_2 tot basis. $A_1A_2C_2P$ en $B_1B_2C_2Q$ zijn parallelogrammen. Voorts zijn de driehoeken $P\,C_2S_1$ en $C_2Q\,S_2$ direkt gelijkvormig met $A_2B_2C_2$ en tenslotte C_1 het vierde hoekpunt van het parallellogram

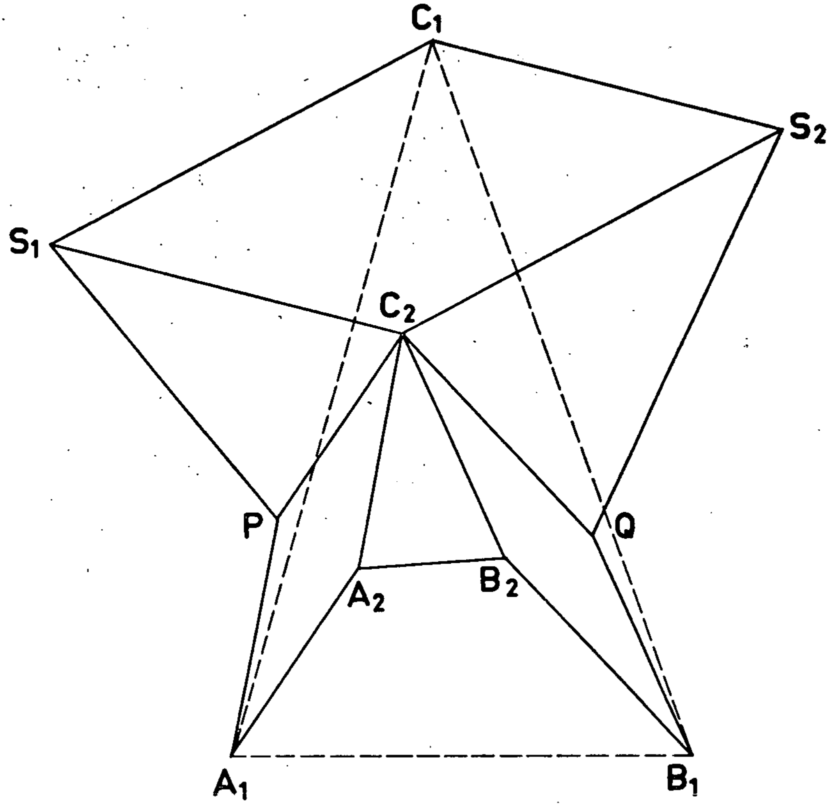


Fig. 2.

$S_1C_2S_2C_1$. De stelling van Roberts zegt nu dat bij de beweging van de stangenvierzijde en de daaruit voortkomende plaatsveranderingen van C_2, P, Q, S_1 en S_2 het punt C_1 op zijn plaats blijft en dat $A_1B_1C_1$ met $A_2B_2C_2$ direkt gelijkvormig is. De stelling is van belang omdat er uit blijkt dat de beweging van C_2 (waarvan de baan een zogenaamde koppelkromme is) ook wordt voortgebracht door twee andere mechanismen, namelijk enerzijds de vierzijde $B_1Q\ S_2C_1$ met de draaipunten B_1 en C_1 terwijl op de zijde QS_2 de driehoek QS_2C_2 is geplaatst en anderzijds door de vierzijde $C_1S_1PA_1$ met op S_1P de driehoek S_1PC_2. Het bewijs van de stelling geschiedt het eenvoudigst met behulp van complexe getallen.

Zij nu $B_2C_2 : C_2A_2 : A_2B_2 = a : b : c$. Dan is $PC_2 = A_1A_2$ en dus $C_2S_1 = \frac{a}{c} A_1A_2$; evenzo is $C_2Q = B_1B_2$ en $C_1S_1 = C_2S_2 = \frac{b}{c} B_1B_2$.

De zijden C_2S_1, S_1C_1 en C_1C_2 verhouden zich als $a\,.\,A_1A_2$, $b\,.\,B_1B_2$ en $c\,.\,C_1C_2$ en de figuur levert rechtstreeks een driehoek waarvan de existentie in IV wordt gesteld.

WHAT IS A QUADRILATERAL?

by

DENIS CRAWFORTH
Exeter, England

De redactie van *Euclides* is de Heer D. H. Wheeler, redacteur van *Mathematics Teaching*, Bulletin of the Association of Teachers of Mathematics in Engeland, dankbaar voor de verleende toestemming tot overname van onderstaand artikel. We stellen deze overname zeer op prijs, omdat er een concrete klassesituatie uit ons wiskunde-onderwijs zo indringend in wordt belicht.

Men kan zich van de regelmatige toezending van de vier maal per jaar verschijnende *Mathematics Teaching* verzekeren door zich op te geven als lid van bovengenoemde Association, tegen een contributie van 30 sh. per jaar, bij de Heer Wheeler, Vine Street Chambers, Nelson, Lancashire, England.

The class consisted of about three dozen boys and girls in the first year of an unselective secondary school. I had not met them before. Their normal teacher had invited me to work with them for a lesson, and she sat in on the lesson. I talked with them and they told me that they had been "doing" quadrilaterals. I asked them what on earth a quadrilateral was, and some children told me it was a thing with four points, and others that it had four sides. Out of the confusion they resolved that it had both four points and four sides.

"Do we need to know as much as that?" I asked. I marked four points on the blackboard [See Fig. 1.] I asked then if they now knew



Figure 1

the quadrilateral. There was a general air of ease and confidence amongst the class; yes, clearly they felt they knew the quadrilateral and that it was clearly defined. I invited any of them to put in the four sides now. There was some hesitation, probably because they did not know me. Before this ice could thaw, I took the opportunity to draw my own four lines. I drew the four lines as seen in Figure 2.

Uproar: "That is not a quadrilateral".

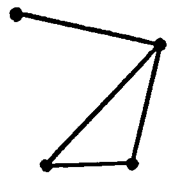


Figure 2

There was a lot of cross-talk, some boys saying stoutly, "But it has four points and four lines", and out of this John came out quite clearly with a statement, "You must draw it without taking your chalk off the blackboard". I retraced my drawing obeying his instruction. There was quiet, many of the children were clearly thoughtful and pondering on what had happened. David then spoke, "You must do what John said, but you must also finish where you started". Again a pool of silence. I challenged anyone in the class to take a piece of chalk and follow David's instruction.

Sylvia comes forward and does her drawing. [See Fig. 3.] There

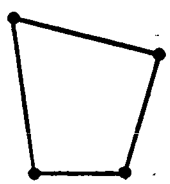


Figure 3

is a general relaxation in tension; clearly Sylvia's drawing is generally acceptable. I now challenge them to produce a different quadrilateral on the same four points, using the instruction which led to the previous acceptable diagram. Another long interval. Finally a boy comes forward and takes a different colour chalk and traces out Fig. 4. There is violent controversy.

Opinions are clearly firmly divided. There are those that hold quite passionately that the new diagram does not represent a quad-

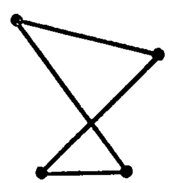


Figure 4

rilateral and those that feel, because David's instructions have been followed, it is a quadrilateral. I make no attempt to arbitrate, I merely attempt to facilitate the public airing of views and opinions.

One or two of the objectors run to the board and stab their fingers at the offending diagram. "Look", says one, "it can 't be a quadrilateral, there's a fifth point" — stabbing at the middle. Another traces his finger over the lines. "You see", he says, "there are six lines instead of four". Another objects, "It is two triangles, not a quadrilateral". A more sophisticated objector returns to Figure 3 and traces with his finger two diagonals. "But this new one it can have no diagonals".

As these matters are talked over, fewer children abject to calling Figure 4 a quadrilateral. However, there remain a few who vigorously uphold their objection and are willing to defy the general acceptance of their colleagues. I still make no attempt to arbitrate, and, strangely, they are not very insistent in their appeals to me for an authoritative statement. I feel that a point has been reached when, though there is not universal agreement, there have been shifts of opinion, and now there is a greater openness to the two points of view with a sort of conditional acceptance of either or even both, pending further evidence among the majority of the class. However, a few remain adamant in their objection to Figure 4, and it seems that it is this violence that sparks reactions from those who do not seem to feel the need to express themselves so violently any more.

I invite the class to draw another different quadrilateral on the same four points. Conditional statements are made. 'If I accept Figure 4 then I could do another" — this from a boy who had objected violently. He comes forward, takes a different coloured chalk, and draws Figure 5. For the class this seems to exhaust the possi-

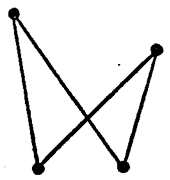


Figure 5

bilities because there are no further offers from them. To fill the gap I invite people to come out and draw the diagonals, but because so far we have used only one diagram and the figures have merely been superimposed on each other in different colours, the class

decides that they must be drawn separately now, and this is done by several of the children, and diagonals are drawn. Time for the lesson ends and I dismiss the children.

Their teacher approached me and immediately objected that I dismissed the children without telling them which was right. She clearly felt unhappy with Figures 4 and 5, and said that she was taught that Figure 3 is the only quadrilateral, but was not confident enough to dismiss 4 and 5 outright, merely saying that she had not considered them as possibilities before. She asked me to tell her directly whether 4 or 5 were quadrilaterals or not. I refused, and suggested that it might be dependent upon what she wanted; that is, it might be better to suspend judgement and then be free to adopt either, according to the special demands of the particular situation in which they arose. For example, we considered two possibilities, the sum of the interior angles of a quadrilateral, and the figure obtained by joining the mid-points of the opposite sides of a quadrilateral.

Footnote 1

At the request of the teacher I agreed to take the class the following week, and as I entered the classroom John, sitting in his desk, held up his hands. He had an elastic band looped around the first finger and thumb of each hand, and when he was sure he had caught my eye, he slowly rotated his right hand so that the quadrilateral formed by the elastic band moved from the type of Figure 3 through a number of skew quadrilaterals until it ended up like the quadrilateral of Figure 4. The rest of the class appreciated John's demonstration, but the boy who refused to include Figure 4 in his notion of a quadrilateral maintained his objection.

Footnote 2

During the first lesson I had numbered the four points of each diagram in order to facilitate some of the verbal description and comments that had been made by the children. During the second lesson this feature was picked on in an attempt to discover how the 24 permutations of 1, 2, 3, and 4 corresponded to the various quadrilaterals we had made.

GELIJKHEID EN IDENTITEIT

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

Oosterbeek

Twee verzamelingen heten gelijk, als ze dezelfde elementen hebben. Alle lege verzamelingen zijn dus gelijk. Daarom kunnen we spreken van *de* lege verzameling. – Is deze redenering juist of rammelt er iets? Om dit te onderzoeken, moeten we er ons rekenschap van geven, wat verstaan wordt onder „gelijk". Is gelijkheid hetzelfde als identiteit? En wat betekent: „identiek"?

a. *Identiteit.* Identiteit is een term, die niet van wiskundige oorsprong is, maar van logische. Dat wil zeggen, dat deze term in de logica gedefinieerd wordt en dan in elke wiskundige theorie gebruikt kan worden. Dit heeft de term „identiek" met vele andere termen gemeen, zoals „of", „niet", „relatie", „reflexief". Deze termen worden in de (formele) logica gedefinieerd en kunnen nu zonder meer in elk wiskundig systeem gebruikt worden.

Blijft natuurlijk de voor ons doel belangrijke vraag, hoe in de logica „identiek" gedefinieerd wordt. In eerste instantie zou ik het volgende antwoord willen geven:

men zegt, dat a identiek is met b, als voor alle uitspraken A en B geldt: als B uit A ontstaat door ergens, waar in A voorkomt a deze a te vervangen door b of omgekeerd, dan is B juist als A juist is, en B onjuist als A onjuist is.

Dit wil dus zeggen, dat het al of niet juist zijn van een uitspraak niet beïnvloed wordt, als we a door b vervangen of omgekeerd. Dit identiteitsbegrip is van Leibniz afkomstig. Het houdt in het ononderscheidbaar zijn van het identieke. Immers als a en b identiek zijn, dan is het niet mogelijk iets aangaande a te beweren, dat niet tevens voor b geldt, en omgekeerd.

Voorbeelden zijn: Napoleon III is identiek met de laatste keizer van Frankrijk, Immanuel Kant is identiek met de schrijver van Kritik der reinen Vernunft, 3^8 is identiek met 6561.

Maar juist als men voorbeelden gaat geven, blijken deze aanvechtbaar te zijn. Zo kan het zijn, dat

Johan denkt, dat Lodewijk XVIII de laatste keizer van Frankrijk is — een juiste uitspraak is, terwijl

Johan denkt, dat Lodewijk XVIII Napoleon III is — geen juiste uitspraak is.

En ook kan het zijn, als Johan niet zo erg slim is, dat

Johan denkt, dat 3^8 even is — juist is, terwijl

Johan denkt, dat 6561 even is — niet juist is.

Een ander obstakel leveren uitspraken als:

De laatste keizer van Frankrijk wordt geschreven met 26 letters (juist) contra: Napoleon III wordt geschreven met 26 letters (onjuist);

6561 wordt geschreven met vier cijfers (juist) en: 3^8 wordt geschreven met vier cijfers (onjuist).

De wiskundige voorbeelden zijn voor ons het gemakkelijkst. Laten we deze daarom onder de loep nemen. Binnen de rekenkunde zal inderdaad het al of niet juist zijn van een uitspraak niet beïnvloed worden door vervanging van 3^8 door 6561 of omgekeerd. De uitspraak „Johan denkt, dat 3^8 even is" is geen rekenkundige uitspraak, en de uitspraak „3^8 is geschreven met vier cijfers" evenmin. In de eerste uitspraak is Johan betrokken en Johan is geen rekenkundig begrip; de tweede uitspraak is een uitspraak over de gebruikte taal en is dus evenmin een rekenkundige uitspraak.

We moeten daarom onze definitie van „identiek" herzien. We moeten de algemeenheid ervan beperken door alleen uitspraken binnen een bepaald wetenschappelijk systeem te beschouwen. Onze definitie wordt daarom:

Definitie. Men zegt, dat a identiek is met b binnen een systeem V van uitspraken, als de juistheid of onjuistheid van uitspraken uit V niet beïnvloed wordt door vervanging van a door b of omgekeerd.

Misverstand zou nog kunnen rijzen t.a.v. de aard van het systeem V. Hiermee is bedoeld een bepaalde wetenschap of tak van wetenschap. In de wiskunde b.v. rekenkunde, groepentheorie, meetkunde op de bol. Men zou kunnen zeggen: een axiomatisch gefundeerde theorie.

Nu is de wiskundige als zodanig altijd aan het redeneren binnen een bepaalde mathematische theorie. En daarbinnen kan hij dus zonder meer gebruik maken van de relatie „identiek". Als hij dan zegt, dat a en b identiek zijn, bedoelt hij straffeloze substitueerbaarheid van a door b of omgekeerd binnen de betrokken theorie.

In de wiskunde komen we de identiteit vaak tegen, zonder dat expliciet de term „identiek" gebruikt wordt. Zelfs worden geheel

verschillende woorden gebruikt om de identiteit aan te duiden. Denkt u maar aan:

het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een gelijkzijdige driehoek *valt samen met* het middelpunt van de omgeschreven cirkel;

in een groep heeft elk element een linker en een rechter inverse; deze zijn *gelijk*;

het kleinste priemgetal *is* het getal 2;

als men een getal door 2 deelt en als men *dat* getal met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigt, krijgt men *dezelfde* uitkomst.

Een andere vermomming van de identiteit vindt men in alle definities. We kiezen een willekeurig voorbeeld: een rechthoek is een parallellogram waarvan een hoek recht is. Als we deze uitspraak met het predikaat definitie bestempelen, dan bedoelen we, dat in elke uitspraak straffeloos „rechthoek" vervangen mag worden door „parallellogram waarvan een hoek recht is" en omgekeerd. En dat wil zeggen, dat de verzamelingen „rechthoek" en „parallellogram waarvan een hoek recht is" identiek zijn.

Nu we zover gevorderd zijn, kunnen we ook de gelijkheden van getallen als identiteiten onderkennen. Ik beweer, dat $2 + 2 = 4$ een identiteit is. D.w.z. dat hier staat: „$2 + 2$ is identiek met 4".

Om na te gaan of dit juist is, moeten we eerst de opbouw van de theorie van de natuurlijke getallen recapituleren. In deze theorie heeft men een niet gedefinieerde grondoperatie „opvolger", genoteerd: $'$. Verder een niet gedefinieerd grondobject, genoteerd 1. De axioma's doen hier verder niet ter zake, maar wel de definities. We hebben de volgende definities:

$$1' = 2,\ 2' = 3,\ 3' = 4,$$
$$a + 1 = a',\ (a + b)' = a + b'.$$

Dit zijn definities en dus identiteiten. Nu redeneren we als volgt:

$$2 + 1 = 2',\ 2' = 3,\ \text{dus}\ 2 + 1 = 3,$$
$$2 + 1' = (2 + 1)',\ 1' = 2,\ 2 + 1 = 3,\ \text{dus}\ 2 + 2 = 3',$$
$$2 + 2 = 3',\ 3' = 4,\ \text{dus}\ 2 + 2 = 4.$$

Hier staan louter identiteiten (omdat uit de definitie van „identiek" de transitiviteit van de identiteit volgt).

We hebben hier een bonte aaneenschakeling van identiteiten de revue laten passeren. Een gemeenschappelijk kenmerk ervan is, dat ze binnen de wiskundige systemen, waarin ze voorkomen, niet gedefinieerd worden. En dat klopt, want „identiek" wordt in de logica gedefinieerd. In verschillende gevallen werd de term „gelijk" voor „identiek" gebruikt, soms ook andere termen. En ook werd

soms het symbool „=" gebezigd. Blijft over de vraag, of nu meteen de gelijkheid afdoende behandeld is, d.w.z. of elke gelijkheid een identiteit is. Deze vraag is slecht gesteld. Beter is: wordt overal in de wiskunde, waar men de term „gelijk" of het symbool „=" gebruikt, daarmee „identiek" bedoeld?

b. *Gelijkheid.* Deze vraag kan alleen maar beantwoord worden door na te gaan, in welke betekenis „is gelijk aan" de facto gebruikt wordt. Hier volgen enkele voorbeelden.

Twee lijnstukken zijn gelijk, als ze dezelfde lengte hebben.

Twee hoeken zijn gelijk, als ze congruent zijn.

Twee verzamelingen zijn gelijk, als ze dezelfde elementen hebben.

Twee natuurlijke getallen zijn gelijk modulo n ($n \in N$), als hun absolute verschil door n deelbaar is.

De verhouding van a en b is gelijk aan de verhouding van c en d ($b \neq 0$, $d \neq 0$), als $ad = bc$.

Euclides noemt twee veelhoeken gelijk, als ze dezelfde oppervlakte hebben.

Het is duidelijk, dat we hier niet met identiteiten te maken hebben. Twee gelijke lijnstukken hoeven niet identiek te zijn, twee gelijke hoeken evenmin. Twee natuurlijke getallen, die modulo n gelijk zijn, zijn in het algemeen niet identiek, gelijke verhoudingen zijn niet identiek en gelijke veelhoeken evenmin. De gelijke verzamelingen zullen we tot slot bekijken.

Waarom wordt in al deze gevallen dezelfde term „gelijk" gebruikt, terwijl deze term in al deze gevallen afzonderlijk gedefinieerd wordt en telkens weer op een andere wijze. Al de hier gedefinieerde relaties hebben gemeen, dat ze reflexief, symmetrisch en transitief zijn. Het zijn dus ekwivalentierelaties. Er zijn echter in de wiskunde talloze ekwivalentierelaties, die niet betiteld worden met „gelijk". We mogen dus alleen het volgende zeggen:

Sommige ekwivalentierelaties worden gelijkheden genoemd. Men spreekt van een gelijkheid alleen in gevallen, waarin sprake is van een ekwivalentierelatie. Maar niet: een gelijkheid is hetzelfde als een ekwivalentierelatie. De gelijkheid wordt in elk wiskundig systeem afzonderlijk gedefinieerd en hoort daarom niet in de logica thuis. Gelijkheden zijn dus wiskundige relaties, hun gemeenschappelijk kenmerk is dat het ekwivalentierelaties zijn.

Ekwivalentierelaties geven aanleiding tot het definiëren van ekwivalentieklassen. Gelijkheid wil dan zeggen: behoren tot dezelfde ekwivalentieklasse. Zo vormen alle getallenparen, die onderling gelijke verhoudingen hebben, een ekwivalentieklasse. Twee getal-

lenparen hebben nu gelijke verhoudingen, als ze tot dezelfde ekwivalentieklasse behoren.

Het is begrijpelijk, dat in sommige gevallen, waarin sprake is van identiteit, de term „gelijkheid" gebezigd wordt. De identiteit is immers zelf ook een ekwivalentierelatie. Vandaar, dat men spreekt van gelijkheid per definitie en van gelijke getallen, terwijl hier sprake is van identiteit. Verwarrend is dit echter wel, want het wekt bevreemding, dat op deze manier gelijkheid soms wel en soms niet gedefinieerd behoeft te worden. Beter zou dus zijn voor „identiteit" een vast symbool te gebruiken, b.v. „=". En dan voor de gelijkheid een ander symbool, afhankelijk van de omstandigheden. Zo gegebruikt men al het symbool $\equiv_n$ voor gelijk modulo n. Gelijkheid van lijnstukken zou men beter niet kunnen aanduiden door te schrijven: $AB = CD$, maar b.v. door $\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(C, D)$ of door $\overline{AB} = \overline{CD}$ (waarin $\overline{AB}$ de lengte van AB voorstelt). Enz.

Blijft nog over de gelijkheid van verzamelingen. Twee verzamelingen zijn gelijk, als ze behoren tot dezelfde ekwivalentieklasse van verzamelingen die twee aan twee dezelfde elementen bevatten. Twee gelijke verzamelingen mogen we dus niet identiek noemen. We mogen dus niet alle lege verzamelingen identiek noemen. En we mogen dus niet spreken van *de* lege verzameling. Tenzij . . . .

c. *Gelijke verzamelingen.* Tenzij gelijke verzamelingen identiek zijn. Om te onderzoeken of gelijke verzamelingen identiek zijn, moeten we nagaan, of $V = W$ met zich meebrengt, dat in elke uitspraak straffeloos V door W vervangen mag worden en omgekeerd.

Om dit na te gaan, zou men uit moeten gaan van een mathematische theorie, zich een zorgvuldig overzicht moeten vormen over de wijze, waarop in die theorie uitspraken gevormd worden, en van de wijze, waarop aan deze uitspraken het predikaat „juist" wordt toegekend. Met andere woorden het zou noodzakelijk zijn de theorie te formaliseren. Daarna moet men de theorie aan een onderzoek onderwerpen, d.w.z. niet in maar over de theorie gaan redeneren. Dit onderzoek kan dan als resultaat hebben, dat gelijke verzamelingen identiek zijn. Of dit resultaat bereikt wordt, zal van de formele structuur van de theorie afhangen.

Aan een voorbeeld wil ik duidelijk maken, dat dit resultaat niet noodzakelijk bereikt wordt. Neem aan, dat een middel om verzamelingen te vormen is het uitgaan van een verzameling V en daarvan de deelverzameling vormen, die bestaat uit alle elementen x van V, die een bepaalde eigenschap $E(x)$ hebben.[1]) Symbolisch

[1]) P. G. J. Vredenduin, Verzamelingen, Euclides, **43**, p. 85.

stellen we de nieuwe verzameling voor door

$$W = \{x \in V | E(x)\}.$$

Om na te gaan, welke elementen W heeft, heeft het nu alleen maar zin de elementen van V de revue te laten passeren. We spreken daarom af, dat

$$p \in W \text{ en } p \notin W$$

uitspraken zijn, als $p \in V$ juist is, en anders niet. U kunt het hiermee eens zijn of niet, dat doet niets ter zake. Een feit is, dat het mogelijk is een formele theorie op te bouwen, waarin deze voorschriften voor het vormen van uitspraken van kracht zijn.

Aan een voorbeeld wil ik deze gedachte verduidelijken. V is de verzameling van alle rechte lijnen in een plat vlak π. Een van de rechten uit dit vlak is l. We definiëren

$$W = \{x \in V | x \;//\; l\}.$$

Verder is P een punt van π. De symboolcombinatie

$$P \in W$$

is nu geen juiste of onjuiste uitspraak. Het is helemaal geen uitspraak. En wel is het daarom geen uitspraak, omdat onze regels volgens welke uitspraken gevormd worden, uitsluiten, dat hier van een uitspraak sprake is [1]).

Nu beschouwen we lege verzamelingen. Laat V_1 de verzameling van de punten van π zijn en V_2 de verzameling van de rechten van π. We beschouwen twee deelverzamelingen

$$W_1 = \{x \in V_1 | E_1(x)\} \text{ en } W_2 = \{x \in V_2 | E_2(x)\}.$$

De eigenschappen $E_1(x)$ en $E_2(x)$ denken we ons zo gekozen, dat W_1 en W_2 beide leeg zijn. Laat nu P een punt van π en l een rechte van π zijn. Dan zijn

$$P \notin W_1 \text{ en } l \notin W_2$$

allebei juiste uitspraken. Maar

$$P \notin W_2 \text{ en } l \notin W_1$$

zijn geen van beide juiste uitspraken, omdat het geen van beide uitspraken zijn. En dus kan niet straffeloos in elke uitspraak W_1

---

[1]) P. G. J. Vredenduin, Formele eigenschappen, Euclides, **43**, p. 313. De regels voor het vormen van uitspraken zijn in dit artikel regels voor het vormen van uitdrukkingen genoemd.

door W_2 vervangen worden en omgekeerd, hoewel beide verzamelingen leeg en dus gelijk zijn. Gelijke verzamelingen hoeven dus niet identiek te zijn.

Laat u zich hierdoor echter niet intimideren. Een wiskundige weet overal raad op. Hij onderscheidt nu de lege verzamelingen $\emptyset_{V_1}$ en $\emptyset_{V_2}$. Hij schrijft niet $\emptyset_{V_1} = \emptyset_{V_2}$, omdat het niet juist is. Hij heeft er ook niet veel behoefte aan dit te schrijven, want de opmerking, dat alle punten van een lege verzameling punten juist dezelfde zijn als alle rechten van een lege verzameling rechten, is niet zo erg interessant. Verder laat hij de indices „V_1" en „V_2" weg, omdat dit weglaten toch nooit tot misverstand aanleiding geeft. En nu is hij weer in het oude spoor teruggekeerd. Hetgeen betekent, dat ook bij doorgefourneerde mathematen het pragmatische het wint van het formeel correcte bij tijd en wijle. En laten we daar blij om zijn.

Moraal. Dus toch: *de* lege verzameling. Maar op pragmatische gronden. Hoewel we elkaar en de leerlingen daarbij een beetje voor de gek houden, maakt dit het leven iets gemakkelijker.

WIMECOS

NOTULEN VAN DE ALGEMENE VERGADERING VAN WIMECOS

28 december 1967 in „Esplanade", Utrecht.

Om 10.35 uur opent de voorzitter, dr. ir. B. Groeneveld, de vergadering. Hij heet de aanwezigen welkom, in het bijzonder de ereleden, prof. dr. O. Bottema en dr. J. H. Wansink, de inspecteurs dr. D. N. van der Neut en drs. B. J. Westerhof, de vertegenwoordigers van zusterorganisaties, dr. Th. Korthagen en G. Krooshof, de sprekers prof. dr. J. J. Seidel en Oberstudienrat A. Engel.

Bericht van verhindering was binnengekomen van drs. H. C. Vernout, drs. A. J. S. van Dam, G. J. J. Boost, dr. W. H. Capel, prof. dr. J. J. van Hercke, drs. A. M. Koldijk, dr. P. J. Gathier, dr. H. A. Gribnau; drs. W. C. Riel.

De presentielijst vermeldt 56 aanwezigen.

Aan het slot van zijn jaarrede, die in Euclides zal worden gepubliceerd, (zie Euclides 43, VII (april 1968)) neemt de voorzitter afscheid van het bestuurslid ir. C. van Vliet; hij bedankt van Vliet i.h.b. voor diens werkzaamheden van tweede secretaris.

N.a.v. de notulen van de jaarvergadering 1966—1967 stelt drs. L. van der Brom de vraag: Wie wordt bedoeld met „hem" in de voorlaatste alinea. De secretaris bevestigt dat de enige logische interpretatie die de heer van der Brom verklaart van dit „hem" te kunnen geven, de juiste interpretatie is. De heer van der Brom verzoekt de voorzitter hem (de heer van der Brom) te noteren voor de rondvraag i.v.m. de bijval die hij volgens de notulen van de voorzitter zou hebben gekregen. Hierna worden de notulen goedgekeurd.

N.a.v. het verslag van het verenigingsjaar 1966—1967 verklaart de heer van

der Brom in de rondvraag te willen terugkomen op de activiteiten van het bestuur betreffende het Interimrapport van de Commissie Opleiding Leraren.

De penningmeester antwoordt op de vraag van een der leden naar de trouw van de Wimecosleden in het betalen van de contributie, dat precies drie leden de contributie van het verenigingsjaar 1966—1967 nog niet hebben voldaan.

De verslagen van de kascommissie, de redaktie van Euclides en de Leesportefeuille worden goedgekeurd.

De penningmeester wordt décharge verleend.

De heren drs. N. A. A. van Niekerk en J. F. Deckers worden benoemd in de kascommissie 1967—1968.

In de vacature, ontstaan door het aftreden van ir. C. van Vliet wordt benoemd de heer M. Kindt.

De contributie voor 1968—1969 wordt vastgesteld op ƒ 9,—.

Om 11.05 uur geeft de voorzitter het woord aan prof. dr. J. J. Seidel; diens voordracht over „Discrete Meetkunde" zal in Euclides worden gepubliceerd.

Om 12.50 uur schorst de voorzitter de vergadering, na een dankwoord aan de spreker.

Om 14.15 uur heropent de voorzitter de vergadering en geeft het woord aan de heer A. Engel; diens voordracht over „Systematische Verwendung der Anwendungen in Mathematikunterricht" zal ook in Euclides worden gepubliceerd.

De voorzitter dankt de heer Engel, en gaat over tot de rondvraag.

De inspecteur dr. D. N. van der Neut bedankt, mede namens zijn collega drs. B. J. Westerhof, voor de uitnodiging. Hij looft de beide sprekers en is verheugd over de idee een buitenlandse spreker uit te nodigen: het wiskunde-onderwijs heeft een internationaal aspect. Hij complimenteert de voorzitter met zijn jaarrede. Hij is verheugd over de goede verstandhouding tussen de inspectie en Wimecos.

De voorzitter dankt de inspectie voor de goede samenwerking.

De heer G. Krooshof dankt Wimecos namens de W.V.O. en Liwenagel; hij complimenteert Wimecos met de keuze van de sprekers. Hij refereert aan de jaarrede van de voorzitter die gezegd heeft dat differentiatie in de onderbouw van het Havo noodzakelijk is en dat de docenten van het Havo voorzichtig moeten zijn met het voorgestelde programma „te zwaar" te noemen.

De heer Krooshof vraagt zich af wat „te zwaar" betekent; hij meent dat wij slecht af kunnen gaan op ervaring en traditie; hij doet Wimecos de suggestie aan de hand, een studiecommissie in te stellen die kan uitzoeken wat „te zwaar" inhoudt. De voorzitter is dankbaar voor deze opmerking; vraagt begrip voor de tendens van wat hij in zijn rede heeft gezegd; het „blauwe boekje" dat 36 stellen examenopgaven bevat, wordt dikwijls te moeilijk gevonden. De vraag blijft: zijn de leerlingen niet intelligent genoeg, of geven wij niet goed genoeg les? Voorzitter meent dat wij naar een hoog niveau moeten streven. Hij wil de suggestie graag overnemen: „U stelt ons wél een zware opgave; voorlopig is er gebrek aan didactische ervaring".

Dr. J. Wansink wenst een nieuw reglement voor Wimecos; de Mavo-leraren lijken uitgesloten te blijven; spreker ziet hier gevaren: verdeling van de groep wiskunde-leraren in twee ondergroepen, een apart tijdschrift voor de Mavo-leraren; spreker wenst nauwe samenwerking.

Voorzitter antwoordt dat het bestuur voorlopig een streep moest trekken zonder het reglement geweld aan te doen; vroeger: HBS- en Gymnasium leraren; nu: Havo- en Vwo-leraren. Een andere beslissing is aan de vereniging, niet aan het bestuur alleen. Het bestuur zal de suggestie van Wansink zeker in overweging nemen.

Ir. C. van Vliet dankt de voorzitter voor diens vriendelijke woorden; nu het onderwijs in een stroomversnelling is gekomen, worden aan het bestuur van Wimecos hoge eisen gesteld; spreker wenst heel veel sterkte en wijsheid toe voor het komende jaar.

Vervolgens is het woord aan drs. L. van der Brom.

Er ontrolt zich een discussie tussen hem en de voorzitter over de volgende punten:
de bijval die de heer van der Brom zou hebben gekregen van de voorzitter op de vorige jaarvergadering;
kritiek op samenwerking met de staatscommissies CMLW en COL;
meer gelegenheid tot gedachtenwisseling dan een rondvraag op de algemene vergadering:
regionale gespreksgroepen.

Uit deze discussie blijkt dat de bijval van de voorzitter het tweede onderwerp betrof, dat de heer van der Brom had aangesneden (zie notulen van de jaarvergadering 1966—1967); dat het bestuur van Wimecos niet eerder medewerking verleent aan activiteiten van staatscommissies dan nadat daarom is gevraagd, en dan nog alleen indien het bestuur die medewerking meent te kunnen verlenen;
dat de voorzitter dankbaar is voor de suggestie inzake regionale gespreksgroepen, maar van mening is dat er al zovele bijeenkomsten van leraren worden georganiseerd, en dat doublures moeten worden vermeden.

De heer W. Knol wijst op het belang van informaties over het wiskunde-onderwijs in het buitenland; spreker zou graag buitenlandse examens willen kunnen vergelijken met die van Nederland. Kunnen buitenlandse examens niet in Euclides worden gepubliceerd?

De heer Knol spreekt zijn waardering uit over de brief van het Wimecos bestuur aan de Commissie Opleiding Leraren.

Voorzitter merkt op dat de redaktie van Euclides aanwezig is, en het voorstel van de heer Knol dus heeft gehoord.

Om 16.25 uur sluit de voorzitter de vergadering.

VERSLAG VAN HET VERENIGINGSJAAR
1 september 1967—31 augustus 1968.

De vereniging telde op 31 augustus 1968: 800 leden.

Het bestuur was in dit jaar als volgt samengesteld: dr. ir. B. Groeneveld, voorzitter, drs. A. J. Th. Maassen, secretaris, drs. J. van Dormolen, penningmeester, C. J. Alders, M. Kindt (vanaf 28 december 1967), ir C. van Vliet (tot 28 december 1967), dr. P. G. J. Vredenduin.

Op 30 oktober 1967 heeft een vergadering plaats gehad in „Esplanade", Utrecht, georganiseerd door Wimecos, Liwenagel en de WVO; verslag van deze vergadering is gedaan in „Euclides", 43, IV, december 1967.

De jaarvergadering werd gehouden op donderdag 28 december 1967.

Op instigatie van dr. J. H. Wansink, krachtig gesteund door drs. B. J. Westerhof, is het bestuur in contact getreden met het Mulo-Verband, om te komen tot een herstructurering van de vereniging; een voorstel tot wijziging van de statuten zal in het volgende verenigingsjaar aan de leden worden voorgelegd.

Het bestuur heeft aan „Pythagoras" ƒ 100,— beschikbaar gesteld voor een prijsvraag.

Het bestuur heeft in dit jaar achtmaal vergaderd.

JAARVERSLAG 1967—1968 VAN DE WIMECOS-LEESPORTEFEUILLE

Het ledenaantal steeg van 32 tot 43, zodat aan abonnementen binnenkwamen ƒ 310,— tegen ƒ 277,— in 1966—1967.

De tijdschriften vroegen ƒ 313,—, terwijl ingebonden jaargangen en nieuwe inlegvellen ƒ 110,— opeisten.

Het nadelig saldo, waarmee in 1968 werd begonnen, bedroeg ƒ 100,— zodat halverwege dit jaar een tekort dreigde van ongeveer ƒ 300,—.

Op 1 augustus j.l. werd een bedrag van ƒ 300,— gestort in de lege kas van de leesportefeuille, zodat nu de situatie weer is opgeklaard, al dreigen steeds tekorten door hoge abonnementen, hoge verzendkosten met daartegenover te lage inkomsten.

De circulatie verloopt zonder veel klachten; alle tijdschriften komen vlot binnen dank zij van Ditmar's Import N.V. die de regeling heeft overgenomen van Meyer en Dupuits uit Maastricht.

november 1968
w.g. G. J. J. Boost.

VERSLAG VAN DE KASCOMMISSIE 1967—1968.

Ondergetekenden J. F. Deckers en N. A. A. van Niekerk hebben de boeken van de penningmeester van Wimecos nagezien.

Zij stellen de ledenvergadering voor hem décharge te verlenen over het verenigingsjaar 1967—1968 en spreken hun waardering uit voor het vele en verdienstelijke werk, dat de heer Van Dormolen in het afgelopen verenigingsjaar voor de vereniging heeft verricht.

Oegstgeest, 29 oktober 1968
w.g. N. A. A. van Niekerk
J. F. Deckers.

REDACTIEVERSLAG 43e JAARGANG VAN EUCLIDES

Aan de besturen van Wimecos,
Liwenagel en de
Wiskunde-werkgroep van de WVO

De aanpassing van de inhoud van Euclides aan wezenlijke behoeften van de Nederlandse wiskundeleraar maakt nog steeds een voorwerp van permanente zorg uit van de redactie. Aan de ene kant moet er gestreefd worden naar het opnemen van eenvoudige stukken die in directe relatie staan tot de dagelijkse klassepraktijk en die de lezer brengen tot een kritische bezinning van zijn schooltaak. Anderzijds wordt de behoefte aan theoretische bezinning door middel van artikelen van hoger niveau sterker in een periode van herstructurering van het wiskundeonderwijs zoals we die heden ten dage doormaken.

Voor de hier bedoelde aanpassing kan de redactie de actieve steun van velen niet missen.

Het lijkt overigens gewenst nog eens op te merken, dat de publikatie van een artikel in Euclides niet impliceert, dat de redactie het met de strekking ervan eens is. Het kan gewenst zijn bepaalde problemen vanuit verschillend standpunt te laten belichten.

Tot onze spijt moest ook dit jaar een aantal ingezonden artikelen geweigerd worden om redenen van verschillende aard.

De 43e jaargang telde 336 pagina's, een vel meer dan normaal, noodzakelijk om

de discussie over de nota's van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde in één nummer te kunnen opnemen.

De samenwerking met de uitgever was zeer goed; het was mogelijk om in dit jaar een systematisch overzicht van het vierde tiental jaargangen te laten verschijnen.

De samenstelling van de redactie was ongewijzigd.

9 november 1968

Namens de redactie
Joh. H. Wansink, voorzitter
A. M. Koldijk, secretaris

BERICHTEN

WISKUNDIG GENOOTSCHAP

Het wintersymposium van het Wiskundig Genootschap zal gehouden worden op vrijdag 3 januari 1969 in de Rijks-H.B.S., Kruisstraat 1 te Utrecht. [1])

Als thema is gekozen „*Waarom wordt het vak Wiskunde gedoceerd op de scholen voor V.W.O. en H.A.V.O.?*"

Deze vraag zal worden behandeld door de volgende sprekers:

Drs. H. P. M. van Kempen, Medewerker van de afdeling Wiskunde van het Shell Laboratorium te Amsterdam

Prof. Dr. Mac Dowell, Committee on the Undergraduate Program in Mathematics of the Mathematical Association of America.

Prof. Dr. R. Timman, Hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Delft, terwijl er ook ruim gelegenheid zal zijn om na de voordrachten met de sprekers van gedachten te wisselen.

Ofschoon deze bijeenkomst in de eerste plaats bestemd is voor leraren, zijn alle overige belangstellenden van harte welkom.

I.v.m. de beperkte ruimte wordt ieder die aan deze bijeenkomst wenst deel te nemen, verzocht zich voor 23 december 1968 aan te melden bij de heer G. v. d. Kuilen, Kruisstraat 1 te Utrecht. Wie aan de gemeenschappelijke lunch wenst deel te nemen, wordt verzocht voor 23 december 1968 *f* 4,— over te maken op giro 725640 ten name van de heer G. v. d. Kuilen te Utrecht.

De bijeenkomst vangt aan te 10.30 uur en eindigt circa 15.30 uur.

De Secretaris,
Dr. A. W. Grootendorst

COLLEGES STERREKUNDE VOOR AFGESTUDEERDEN

Traditiegetrouw organiseert het Utrechts Sterrekundig Instituut ook in het academisch jaar 1968—1969 een reeks colleges voor afgestudeerden. Het algemene onderwerp is:

INTERFEROMETRIE IN DE STERREKUNDE.

De volgende voordrachten worden gehouden:

23 januari: Prof. Dr. H. G. van Bueren: „*Grondbeginselen van de interferometrie*".
30 januari: Dr. Th. Walraven: „*Interferometrie in de optische sterrekunde*".
6 februari: Prof. Ir. C. A. Muller: „*Interferometrische methoden in de radiosterrekunde*".

---

[1]) Niet in Wageningen, zoals tot onze spijt in het vorige nummer werd vermeld (red.).

13 februari: Dr. A. D. Fokker: „*Resultaten van interferometrisch onderzoek* (galactisch en solair)".

De voordrachten worden gehouden in het Universiteitsgebouw, Domplein 29 te Utrecht, en duren van 19.30 uur precies tot 21.15 uur precies.

Leraren kunnen hun reiskosten vergoed krijgen.

Men geve zich voor deelname op bij het secretariaat van het Sterrekundig Instituut te Utrecht, p/a Laboratorium voor Ruimte-Onderzoek, Huizingalaan 121.

C. de Jager.

BOEKBESPREKING

W. T. Tutte, *Connectivity in Graphs*, University of Toronto Press, 1966, 145 bladzijden, 6 dollars.

Een grondige bespreking van dit boek is in dit tijdschrift niet erg op zijn plaats. Het is een specialistisch werk over een vrij nauw begrensd onderwerp. In feite kondigt de auteur aan dat hij deze studie geschreven heeft alsof ze het eerste deel van een trilogie was. De stijl van het boek is zeer compact en de woordkeus is soms uitgesproken bizar. Bovendien maakt de repetente definitie-stelling-bewijs-structuur van de stofindeling het de lezer moeilijk een overzicht te krijgen en te houden. Ik kan dit boek dus niet aanraden aan hem, die kennis wil maken met en geboeid wil worden door de grafentheorie.

A. v. Tooren

Dr. P. G. J. Vredenduin, *Algebra voor de brugklas v.w.o.-h.a.v.o.*, 121 blz., *f* 5,90. J. B. Wolters, Groningen, 1968.

Nadat in hoofdstuk 1 praktisch dezelfde inleiding tot de verzamelingen is gegeven, als in het hierboven besproken boekje: meetkunde voor de brugklas, behandelt de auteur de structuur van de verzameling N_0 (de natuurlijke getallen en het getal nul).

De commutatieve, associatieve en distributieve eigenschappen worden met kardinalen van eindige verzamelingen aannemelijk gemaakt en, wat zeer belangrijk is, de praktische toepassing ervan worden ook getoond.

Uit het niet gesloten zijn van N_0 t.o.v. de aftrekking laat Vredenduin de behoefte ontstaan tot een uitbreiding van N_0. Zo ontstaat de verzameling G bestaande uit de natuurlijke getallen, het getal nul en de streepgetallen *a*, waarin *a* een natuurlijk getal is.

Ook in G worden de operaties optellen en vermenigvuldigen op hun eigenschappen onderzocht.

De eigenschap: „deling in G is niet gesloten" dwingt dan tot een verdere uitbreiding van de getallenverzameling.

Deze methode om de algebra in de brugklas in te leiden is mij uit het hart gegrepen. Het spijt me daarom dat de auteur bij de vermenigvuldiging in G gebruik gemaakt heeft van de z.g. Halley-methode. (Het suggereren door middel van vermenigvuldigingstabellen.)

Naar mijn mening had de methode van Hankel prachtig in de opzet gepast, d.w.z. in een uitbreiding zoveel mogelijk de reeds bestaande eigenschappen laten voortbestaan.

Dit alles kan echter een voorkeurskwestie zijn. Ik ben er dan ook van overtuigd dat de schrijver veel succes zal hebben met zijn algebra voor de brugklas.

J. J. Wouters

A. Ádám, *Truth functions and the problem of their realization by two-terminal graphs*, Budapest 1968, 206 blz.

Dit is een monografie over functies in dc Boole-algebra met twee elementen. Deze theorie heeft betekenis voor die van de eindige automaten. Hier wordt ze van een zuiver wiskundig standpunt uit behandeld. De schrijver gaat slechts kort op de toepassingen in.

A. Heyting

Gerhard Frey, *Einführung in die philosophischen Grundlagen der Mathematik*; 116 blz.; geb. DM. 8.80; Schroedel-Schönigh, Hannover-Paderborn.

Dit bondig geschreven boekje over filosofische problemen die voor alle wiskundeleraren bij het voortgezet onderwijs van belang zijn, van de hand van een terzake deskundig auteur, is geschreven als Ergänzungsheft zum mathematischen Unterrichtswerk für Höhere Lehranstalten van Reidt-Wolff-Athen. Het geeft een indringend overzicht van de problematiek van de Griekse wiskunde, van de scholastiek der middeleeuwen en van de grondslagenstrijd uit de nieuwere tijd (tot en met het positivisme, de Wiener Kreis, de school van Fries, het intuïtionisme en de philosophie ouverte van Gonseth. Uitvoerig wordt de wiskundige logica besproken, zowel de predikatenlogica als de oordeelslogica. Het derde deel behandelt de axiomatisering van de wiskunde. het probleem van het oneindig kleine en het oneindig grote, de paradoxen over het oneindige, de typen van bewijsvoering die in de wiskunde worden toegelaten, het intuïtionisme, het logicisme, het formalisme en het operationisme.

Dit boekje, dat zich uiteraard niet leent tot gebruik op onze scholen, is voor alle wiskundedocenten waarvan velen gedurende hun opleiding niet of nauwelijks met filosofische problemen werden geconfronteerd, van essentiële betekenis.

Kennismaking ermee wordt dan ook aan ieder aanbevolen.

Joh. H. Wansink

F. H. Young, *The nature of mathematics*, John Wiley & Sons, Londen, 1968. 407 blz., 66/—.

Dit boek is geschreven voor degenen die, al over enige kennis beschikkend van algebra en meetkunde, belangstelling hebben voor wiskunde, zonder deze strikt als studieobject te willen kiezen. Als zodanig een zeer geschikt boek over de schoolbibliotheek.

Na een kort historisch overzicht maakt men kennis met de axioma's van Peanc, waarbij aan het inductiepostulaat bijzondere aandacht wordt besteed. De voornaamste consequenties worden niet afgeleid maar gepostuleerd, zodat de algebraïsche operaties degelijk gefundeerd worden. De verzameling van de natuurlijke getallen wordt nu geleidelijk uitgebouwd tot die van de reële getallen.

Daarna volgt de verzamelingsalgebra, tweewaardige Boole-algebra met toepassing op schakelsystemen en de propositionele logica.

Men vindt een hoofdstuk over consequenties en stelsels consequenties, de analysitische meetkunde in R_2, relaties en functies, infinitemaalrekening, vectoralgebra, matrices, determinanten om te besluiten met wetenswaardigheden over computers.

Een groot aantal opgaven, met vele aanwijzingen en uitkomsten, helpen het behandelde te doen beklijven. De uitvoering is, zoals men gewend is, voortreffelijk.

Burgers

Anton Fischer, *Die philosophischen Grundlagen der wissenschaftlichen Erkenntnis*, Springer Verlag, Wien, New York. Zweite, umgearbeitete Auflage 1967. VI + 226 blz.

Dit boek is van belang voor diegenen die belangstelling hebben voor kennistheorie in het algemeen. De grondslagen der wiskunde worden slechts kort en oppervlakkig besproken.

A. Heyting

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek.

208. Een stapel kaarten wordt opnieuw gerangschikt. Men legt de bovenste kaart op tafel, de tweede daarop, de derde onderaan, de vierde weer bovenop, de vijfde onderaan, enz. Men herhaalt deze bewerking nog eenmaal. Het blijkt dan, dat de kaart, die aanvankelijk de 395e van boven was, nu de 394e van boven geworden is. Hoeveel kaarten bevat de stapel? (B. Kootstra)

209. Nu u opgave 206 opgelost heeft — de oplossing vindt u hieronder — kunt u het volgende proberen:

a. Kies de eerste twee termen zo, dat alle getallen 0, 1, . . ., 9 in de rij voorkomen.

b. Idem en stel bovendien de eis, dat de rij vanaf het begin of eventueel vanaf een zeker rangnummer repeteert.

OPLOSSINGEN

206. De rij

$$2, 3, 6, 1, 8, 6, 8, 4, 8, \dots$$

is bepaald door $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, $t_3 = t_1 \cdot t_2$, $t_2 \cdot t_3 = 18$ en daarom $t_4 = 1$, $t_5 = 8, \dots$ Gevraagd worden de rangnummers van de eerste term, die gelijk is aan 4, aan 5, aan 7, aan 9.

Zo men ziet is het rangnummer van de eerste term 4 gelijk aan 8. Nu is de enige mogelijkheid om uit 1, 2, 3, 4, 6, 8 een van al deze verschillende term af te leiden het voorkomen van twee opeenvolgende termen 3. Echter kan 3, 3 alleen ontstaan, als te voren opgetreden is 3, 1, 3 of 1, 3, 1. Het eerste kan alleen ontstaan uit 3, 1, 1, 3; het tweede kan niet voorkomen. En 3, 1, 1, 3 kan alleen voortkomen uit 3, 1, 1, 1, 3, enz. Dus kunnen de getallen 5, 7, 9 niet voorkomen.

207. De gestelde opgave kan men kort zo formuleren: hoeveel convexe veelhoeken worden ingesloten door de lijnen, waarlangs de langste diagonalen van een regelmatige elfhoek vallen?

De diagonalen sluiten een regelmatige elfhoek in. Elke andere convexe veelhoek, die ze insluiten, wordt verkregen door uit de elf diagonalen een willekeurig aantal (minstens drie) te kiezen; deze sluiten steeds een convexe veelhoek in. Het gevraagde aantal is dus:

$$\binom{11}{3} + \binom{11}{4} + \cdots + \binom{11}{11} = 1981.$$

Aan de abonnees,

Helaas zien wij ons genoodzaakt de prijzen voor abonnementen en losse nummers per 1 januari 1969 ten gevolge van de verplichte belasting op de toegevoegde waarde (b.t.w.) en de sterk gestegen produktie- en verzendkosten te verhogen. Tot nu toe was dit tijdschrift van omzetbelasting vrijgesteld. Nu echter zal het tarief van 4 percent worden toegepast.

Per 1 januari 1969 zullen daarom de volgende prijzen moeten gaan gelden:

abonnementen: **f 9,25** per jaargang; samen met N. T. voor Wiskunde: **f 8,—** per jaargang; losse nummers: **f 1,75.**

DE UITGEVER